

Lösungen Probeklausur

11

A1

- a) 1, 2, 3 stehe für die drei Wagen; jedes 9-Tupel aus diesen drei Zahlen entspricht einer Verteilung der heute auf die drei Wagen. Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$p = \frac{\text{Anzahl aller 9-tupel mit genau dreimal 1}}{\text{Anzahl aller 9-tupel}}$$

$$= \frac{\binom{9}{3} \cdot 2^6}{3^9} = 0.273129.$$

b)

$$p = \frac{\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3}}{3^9} = 0.08535284.$$

- c) zweimal die 1, dreimal die 2, viermal die 3;
oder ... : $3! = 6$ verschiedene solcher Wagen-Wahlen.

Also

$$p = 6 \cdot \frac{\binom{9}{2} \cdot \binom{7}{3}}{3^9} = 0.38408779.$$

A2

$$p = \binom{90}{10} / \binom{100}{10} = 0.330476.$$

A3 $K =$ Student kennt die Antwort
 $R =$ Student kreuzt richtig an $\underline{\leq 2}$

Geg.: $P(K) = p$, $P(R|\bar{K}) = \frac{1}{m}$.

Ges.: $P(K|R)$.

$$P(K|R) = \frac{P(R|K) \cdot P(K)}{P(R|K) \cdot P(K) + P(R|\bar{K}) \cdot P(\bar{K})} = \frac{1 \cdot p}{1 \cdot p + \frac{1}{m} \cdot (1-p)}$$
$$= \frac{m p}{m p + 1 - p} \quad (\text{Bei gro\ss{}em } m \text{ ist dies fast } = 1.)$$

A4

a) $c \cdot \int_0^2 (4x - 2x^2) dx \stackrel{!}{=} 1$

$$\Rightarrow c \cdot \frac{8}{3} = 1, \quad c = \frac{3}{8}.$$

b) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x^2}{4}(3-x), & 0 \leq x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$

c) $P(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}) = F(\frac{3}{2}) - F(\frac{1}{2}) = \frac{11}{16}.$

A5

$X_1, \dots, X_{25}$ Einzellevensdauern,
 μ_k, σ_k^2 ($1 \leq k \leq 25$) die zugehörigen
Mittelwerte und Varianzen.

$$Y = X_1 + \dots + X_{25} \Rightarrow E(Y) = \sum_{k=1}^{25} \mu_k,$$

$$\text{Var } Y = \sum_{k=1}^{25} \sigma_k^2.$$

⌊3

Zentraler Grenzwertsatz:

$$Y \sim N\left(\sum_{k=1}^{25} \mu_k; \sum_{k=1}^{25} \sigma_k^2\right)$$

(annähernd),

$$\text{also } Y \sim N(1000; 10000).$$

Daher (Standardisierung!)

$$\begin{aligned} P(Y \geq 1100) &= 1 - P(Y \leq 1100) = \\ &= 1 - P\left(\frac{Y - 1000}{100} \leq 1\right) = 1 - \Phi(1) = \\ &= 1 - 0.841 = \underline{\underline{0.159}}. \end{aligned}$$

A6

Sei X der Milchfettgehalt der Kühe in Prozent, also $X \sim N(3.7; 0.0081)$.

Dann ist x_0 gesucht mit

$$P(X \geq x_0) = 0.6.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} P(X \geq x_0) &= P\left(\frac{X - 3.7}{0.09} \geq \frac{x_0 - 3.7}{0.09}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{x_0 - 3.7}{0.09}\right) = 0.6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{3.7 - x_0}{0.09}\right) &= 0.6 & \Rightarrow \frac{3.7 - x_0}{0.09} \approx 0.2525 \\ & & \Rightarrow \underline{\underline{x_0 = 3.677}} \end{aligned}$$