$\sum 5$



## Aufgabe 1

Eine Multiple-Choice-Klausur bestehe aus 60 Fragen mit je 5 Auswahlantworten, von denen jeweils genau eine richtig ist. Ein Student kenne bei 50 der Fragen die richtige Antwort und müsse bei den restlichen 10 Fragen rein zufällig raten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er

a) genau 50 Fragen richtig beantwortet;

b) mindestens 52 Fragen richtig beantwortet?

a) $\left(\frac{4}{5}\right)^{10} = 0.107\ldots$ 2

b) $1 - \left( \underbrace{\left(\frac{4}{5}\right)^{10} + \frac{10}{5}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{9}}_{P(\text{höchstens eine richtig})} \right) = \cancel{0.86578\ldots}\ 0.624\ldots$ 3

Matrikelnummer: $\sum 8$



## Aufgabe 2

Eine Ersatzteil-Lieferung enthalte einen Karton Kugellager, zwei Kartons Zahnräder und drei Kartons Schrauben. Die Kartongewichte (in $kg$) seien durch unabhängige normalverteilte Zufallsgrößen $X$, $Y_1, Y_2$ sowie $Z_1, Z_2, Z_3$ beschreibbar mit

$$E(X) = 125, Var(X) = 1, \quad E(Y_i) = 84, Var(Y_i) = 4 \ (i = 1, 2),$$
$$E(Z_k) = 65, Var(Z_k) = 3 \ (k = 1, 2, 3).$$

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wiegt die Ersatzteillieferung mehr als 500 $kg$?

b) Wie viele solcher Ersatzteil-Lieferungen darf man maximal auf einen Lkw laden, wenn das zulässige Gesamtgewicht von 18 Tonnen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 Prozent eingehalten werden soll?

a) $G = X + Y_1 + Y_2 + Z_1 + Z_2 + Z_3$

ist $N(\mu; \sigma^2)$-verteilt mit

$\mu = 125 + 2 \cdot 84 + 3 \cdot 65 = 488,$ 1

$\sigma^2 = 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 = 18,$ 1

$P(G > 500) = P\left(\frac{G - 488}{\sqrt{18}} > \frac{500 - 488}{\sqrt{18}}\right) =$

$= 1 - \Phi\Big(\underbrace{\frac{12}{3\sqrt{2}}}_{= 2.83}\Big) = 1 - 0.998\cancel{3} = \underline{\underline{0.002}}.$ 2

b) $S = G_1 + \dots + G_n$

$\sim N(n \cdot 488; n \cdot 18)$ 1

$P(S \leq 18000) = P\left(\frac{S - n \cdot 488}{\sqrt{18n}} \leq \frac{18000 - 488n}{\sqrt{18n}}\right)$

$= \Phi\left(\frac{18000 - 488n}{\sqrt{18n}}\right) \geq 0.99 \Leftrightarrow \frac{18000 - 488n}{\sqrt{18n}} \geq u_{0.99} =$ 1

$= 2.325 \implies \underline{n \leq 36}$ 2

$$\left.\frac{18000-488n}{\sqrt{18n}}\right|_{n=36} = 16.97\ldots > 2.325$$

$$\left.\frac{18000-488n}{\sqrt{18n}}\right|_{n=37} = -2.1699559\ldots < 2.325$$

## Aufgabe 3

Eine Zufallsgröße $X$ habe die Dichtefunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/4, & 0 < x \leq 2, \\ 1/2, & 2 < x \leq 3, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man berechne die Dichte und Verteilungsfunktion der Zufallsgröße $Y = X^2$.

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \frac{t}{4}, & 0 \leq t \leq 2, \\ \frac{1}{2} + \frac{t-2}{2}, & 2 \leq t \leq 3, \\ 1, & t > 3. \end{cases} \quad 2$$

$$\Rightarrow$$

$$F_Y(t) = P(X^2 \leq t) =$$

$$= \begin{cases} 0, & t < 0, \\ P(-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t}), & t \geq 0, \end{cases} \quad 1$$

$$= \begin{cases} 0, & t < 0 \\ F_X(\sqrt{t}), & t \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \frac{\sqrt{t}}{4}, & 0 \leq t \leq 4, \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{t}-2}{2}, & 4 \leq t \leq 9, \\ 1, & t > 9. \end{cases} \quad 3$$

$$\Rightarrow f_Y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \frac{1}{8\sqrt{t}}, & 0 < t < 4, \\ \frac{1}{4\sqrt{t}}, & 4 < t < 9, \\ 0, & t > 9. \end{cases} \quad 3$$

## Aufgabe 4

Nach einem Picknick vermisst eine Familie ihren Hund. Es gibt drei Möglichkeiten:

A: Er ist schon nachhause gelaufen und erwartet die Familie vor der Haustür.

B: Er ist noch auf dem Picknickplatz und dort mit einem großen Knochen beschäftigt.

C: Er streunt im Wald umher.

Da man den Hund und seine Gewohnheiten gut kennt, weiß man:

$$P(A) = 1/4, \quad P(B) = 1/2, \quad P(C) = 1/4.$$

Je ein Kind wird zurück zum Picknick-Platz bzw. zum Waldrand geschickt. Sei 90% die Wahrscheinlichkeit, ihn – falls er dort ist –, auf dem Picknickplatz zu finden, hingegen nur 50% die Wahrscheinlichkeit, ihn im Falle des Herumstreunens im Wald zu finden.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet eines der Kinder den Hund?

b) Wie groß ist die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, den Hund bei der Rückkehr vor der Haustür anzutreffen, *falls* die Kinder ihn nicht finden?

F : Ein Kind findet den Hund.

$\Rightarrow P(F|A) = 0, \quad P(F|B) = 0.9, \quad P(F|C) = 0.5.$

a) $$P(F) = P(F|A) \cdot P(A) + P(F|B) \cdot P(B) + P(F|C) \cdot P(C)$$ 2

$$= 0 + 0.45 + 0.125 = \underline{\underline{0,575}}$$

b) $$P(A|\bar{F}) = \frac{P(A \cap \bar{F})}{P(\bar{F})} = \frac{P(A)}{P(\bar{F})}$$

$\bar{F} \supseteq A$

$$= \frac{0,25}{1-0,575} = \underline{\underline{0,5882}}$$

2

*Matrikelnummer:* $\Sigma\ 5$



## Aufgabe 5

Die Zerfallszeit $X$ der Atome einer radioaktiven Substanz ist eine exponentialverteilte Zufallsgröße. Die *Halbwertszeit* ist die Zeit, nach der 50% der Atome der Substanz zerfallen sind, also der Median der Zufallsgröße. Für **Radon** beträgt die Halbwertszeit 3.83 Tage.

a) Man bestimme den Parameter $\lambda$ der zugehörigen Verteilung.

b) Nach welcher Zeit sind 95% der Atome eines Kilogramms Radon zerfallen?

a) $$F_X(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0, \end{cases}$$

$$F_X(3.83) = 0.5 = 1 - e^{-\lambda \cdot 3.83} \quad 2$$

$$\Rightarrow \; -\lambda \cdot 3.83 = \ln(1-0.5),$$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{3.83} = \underline{\underline{0.181}} \left[\frac{1}{\text{Tage}}\right] \quad 1$$

b) $$F_X(t) = 0.95$$

$$\Leftrightarrow \; 1 - e^{-0.181\, t} = 0.95 \quad 2$$

$$\Leftrightarrow \; t = \frac{\ln(1-0.95)}{-0.181} = \underline{\underline{16.55}}\,[\text{Tage}]$$

## Aufgabe 6

Eine Spardose, die $n$ Euro-Stücke enthält, wird geöffnet und ihr Inhalt auf einen Tisch geschüttet.

Wie groß muss $n$ mindestens sein, damit mit einer Wahrscheinlichkeit $\geq 0.95$ bei mindestens 45% und höchstens 55% der Euro-Stücke „Zahl" oben liegt?

(Das minimale $n$ ist *näherungsweise* zu bestimmen.)

$$X_k := \begin{cases} 1, & k.\text{ Münze zeigt „Zahl"} \\ 0, & k.\text{ Münze zeigt „Wappen"} \end{cases}$$

$(1 \leq k \leq n)$

$\Rightarrow Y = X_1 + \dots + X_n$ 1

ist Anzahl der Münzen mit „Zahl".

$E(X_k) = 0.5$, $Var(X_k) = (1-0.5)^2 \cdot 0.5 + (0-0.5)^2 \cdot 0.5 = 0{,}25$ 1

ZGWS 2

$\Rightarrow Y \sim N(n \cdot 0.5;\ n \cdot 0.25)$

näherungsweise.

Also

$$P(0.45n \leq Y \leq 0.55n)$$

$$= P\left(\frac{0.45n - 0.5n}{0.5 \cdot \sqrt{n}} \leq \frac{Y - 0.5n}{0.5 \cdot \sqrt{n}} \leq \frac{0.55n - 0.5n}{0.5 \cdot \sqrt{n}}\right)$$

3 $= \Phi(\cancel{0.0}\ 0.1\sqrt{n}) - \Phi(-0.1\sqrt{n}) = 2\Phi(0.1\sqrt{n}) - 1$

$\overset{!}{\geq} 0.95 \Leftrightarrow 0.1\sqrt{n} \geq u_{0.975} = 1.96 \Leftrightarrow n \geq (19.6)^2$

$\Leftrightarrow n \geq \underline{\underline{385}}$