

Lösung der Klausur vom 21. 01. 2008

Σ 6

Matrikelnummer:

1

Aufgabe 1

In einem Restaurant essen mittags durchschnittlich 40% der Gäste keine Vorspeise, 35% keinen Nachtisch und 15% weder Vorspeise noch Nachtisch. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jemand,

- der keinen Nachtisch wählt, auch keine Vorspeise nimmt;
- der eine Vorspeise wählt, auch noch einen Nachtisch nimmt?

Hinweis: Die Bayessche Formel wird nicht gebraucht.

Nützlich ist evtl. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \dots$

Bezeichnungen: $V, N, \bar{V}, \bar{N}$.

Geg.: $P(\bar{V}) = 0.4, P(\bar{N}) = 0.35, P(\bar{V} \cap \bar{N}) = 0.15$.

$$a) P(\bar{V} | \bar{N}) = \frac{P(\bar{V} \cap \bar{N})}{P(\bar{N})} = \frac{0.15}{0.35} = \underline{0.4286} \quad (2)$$

$$b) P(N | V) = \frac{P(N \cap V)}{P(V)} = \frac{0.4}{0.6} = \underline{0.6667} \quad (1)$$

Denn:

$$\begin{aligned} P(V \cup N) &= P(V) + P(N) - P(V \cap N) \\ &= 1 - P(\bar{V} \cap \bar{N}), \quad (2) \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} P(V \cap N) &= P(V) + P(N) + P(\bar{V} \cap \bar{N}) - 1 \\ &= P(\overline{\bar{V} \cup \bar{N}}) = 0.6 + 0.35 + 0.15 - 1 \end{aligned}$$

$$= 1 - P(\bar{V} \cup \bar{N}) = 0.4 \quad (1)$$

$$= 1 - (P(\bar{V}) + P(\bar{N}) - P(\bar{V} \cap \bar{N}))$$

$$\begin{aligned} \text{(Oder: } P(N | V) &= 1 - P(\bar{N} | V) = 1 - \frac{P(V | \bar{N}) \cdot P(\bar{N})}{P(V)} \\ &= 1 - \frac{(1 - P(\bar{V} | \bar{N})) \cdot P(\bar{N})}{P(V)} \end{aligned}$$

$$\left(\text{Oder: } \begin{array}{c|cc} & N & \bar{N} \\ \hline V & 0.4 & 0.2 & 0.6 \\ \hline \bar{V} & 0.25 & 0.15 & 0.4 \\ \hline & 0.65 & 0.35 & \end{array} \Rightarrow a) \text{ und } b) \right)$$

Matrikelnummer:

$\sum 6$
2

Aufgabe 2

Eine Eisdiele führt acht verschiedene Eissorten. Ein Eisbecher mit vier Kugeln werde zusammengestellt. Angenommen, jede Zusammenstellung von vier Kugeln (unter Beachtung der Reihenfolge) sei gleichwahrscheinlich. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass

- a) die vier Kugeln des Bechers von verschiedenen Sorten sind;
- b) die vier Kugeln des Bechers alle von derselben Sorte sind;
- c) je zwei Kugeln von derselben Sorte sind.

$$a) \quad p_a = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{8^4} = \frac{1680}{2^{12}} = 0.410156 \quad (2)$$

$$b) \quad p_b = \frac{8}{8^4} = 0.00195 \quad (2)$$

$$c) \quad p_c = \frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{4}{2}}{8^4} = 0.0410156 \quad (2)$$

($= p_a / 10.$)

(Zu c): Schoko-Schoko-Vanille-Vanille
Schoko-Vanille-Schoko-Vanille
sind zwei mögliche Auswahlen)

Matrikelnummer:

$\sum 6$
3

Aufgabe 3

Sei X eine poissonverteilte Zufallsgröße mit dem Parameter $\lambda = 4$. Man ermittle folgende Wahrscheinlichkeiten:

- a) $P(X < 4)$;
- b) $P(X = 4)$.
- c) $P(X = 1 \mid X > 0)$;
- d) $P(X > 3 \mid X > 0)$.

$$a) \quad p = \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!}\right) \cdot e^{-\lambda} = \underline{\underline{0.43347}} \quad (1)$$

$$b) \quad p = \frac{\lambda^4}{4!} e^{-\lambda} = \underline{\underline{0.1953668}} \quad (1)$$

$$c) \quad p = \frac{P(X=1 \mid X>0)}{P(X>0)} = \frac{\frac{\lambda}{1!} \cdot e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} = \frac{\lambda}{e^{\lambda} - 1} = \underline{\underline{0.0746}} \quad (2)$$

$$d) \quad p = \frac{1 - \overbrace{e^{-\lambda} \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!}\right)}^{a)!}}{1 - e^{-\lambda}} = \underline{\underline{0.5771}} \quad (2)$$

$\neq$

Aufgabe 4

Die Messung des Kohlenmonoxid-Konzentration im Abgas eines Heizwerks sei eine Zufallsgröße X mit $E(X) = \mu$ [g/cm^3] und $Var(X) = 0.0001$.

Wie viele unabhängige Konzentrationsmessungen sind durchzuführen, damit das arithmetische Mittel der Messwerte mit mindestens 90%-iger Wahrscheinlichkeit um weniger als 0.003 von μ abweicht?

Hinweis: Zentraler Grenzwertsatz.

Einzelmessungen $X_1, \dots, X_n$

$$\Rightarrow E(X_k) = \mu, Var(X_k) = 0.0001,$$

$$E\left(\underbrace{\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)}_{=: \bar{X}}\right) = \mu, Var(\bar{X}) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot 0.0001. \quad (2)$$

$$ZGS: \bar{X} \sim N\left(\mu; \frac{1}{n} \cdot 0.0001\right) \text{ näherungsweise} \quad (1)$$

Also:

$$P(|\bar{X} - \mu| < 0.003) =$$

$$= P(\bar{X} \leq \mu + 0.003) - P(\bar{X} \leq \mu - 0.003) \quad (1)$$

$$= \cancel{P} \Phi\left(\frac{0.003}{\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot 0.01}\right) - \Phi\left(-\frac{0.003}{\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot 0.01}\right) \stackrel{!}{\geq} 0.9 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \Phi(\sqrt{n} \cdot 0.3) \geq 0.95 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n} \geq \frac{u_{0.95}}{0.3} = \frac{1.645}{0.3} \Leftrightarrow n \geq 30.0669$$

Fazit: $n \geq 31$ (1)

$\Sigma 5$

5

Matrikelnummer:

Aufgabe 5Sei X eine stetige auf $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ gleichverteilte Zufallsgröße.

- a) Man bestimme die Verteilungsfunktion zu $Y := |X|$.
 b) Man bestimme die Verteilungsfunktion zu $Z := X^3$.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{1}{2} \\ x + \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \\ 1, & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}, \quad (1)$$

$$a) \quad P(Y \leq x) = P(|X| \leq x)$$

$$= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ P(-x \leq X \leq x), & x \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ (x + \frac{1}{2}) - (-x + \frac{1}{2}), & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1, & x \geq \frac{1}{2} \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2x, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1, & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}, \quad (2)$$

$$b) \quad P(Z \leq x) = P(X^3 \leq x) =$$

$$= P(X \leq \sqrt[3]{x}) = F_X(\sqrt[3]{x}) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \sqrt[3]{x} < -\frac{1}{2} \\ \sqrt[3]{x} + \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2} \leq \sqrt[3]{x} < \frac{1}{2} \\ 1, & \sqrt[3]{x} \geq \frac{1}{2} \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < -\frac{1}{8} \\ \sqrt[3]{x} + \frac{1}{2}, & -\frac{1}{8} \leq x < \frac{1}{8} \\ 1, & x \geq \frac{1}{8} \end{cases}, \quad (2)$$

Aufgabe 6

Erfahrungsgemäß weisen 3% der Schleifscheiben einer Produktion Mängel auf, die nach kurzer Benutzungsdauer bemerkt werden. Den Abnehmern von Kisten mit 500 Stück soll eine Entschädigung gezahlt werden, wenn bei mindestens K der Schleifscheiben solche Mängel auftreten.

Wie groß muss K mindestens sein, damit bei höchstens 2.25% der Kisten eine Entschädigung zu zahlen ist?

Hinweis: ZGS benutzen!

X^* = Anzahl der defekten Scheiben
einer Lieferung

$$P(X^* = k) = \binom{500}{k} \cdot 0.03^k \cdot 0.97^{500-k}$$

(Binomialverteilung)

$$E(X^*) = 500 \cdot 0.03, \quad \text{Var}(X^*) = 500 \cdot 0.03 \cdot 0.97.$$

ZGS; $X^* \sim N(500 \cdot 0.03; 500 \cdot 0.03 \cdot 0.97)$
näherungsweise

$$P(X^* \geq k) = 1 - \Phi\left(\frac{k - \frac{1}{2} - 15}{\sqrt{15 \cdot 0.97}}\right) \stackrel{!}{\leq} 0.0225$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{k - \frac{1}{2} - 15}{\sqrt{15 \cdot 0.97}}\right) \geq 0.9775$$

$$\Leftrightarrow k \geq \sqrt{15 \cdot 0.97} \cdot \underbrace{u_{0.9775}}_{\approx 2.003} + 15.5 = 23.14$$

Also: Ab 24 defekten Scheiben
wird Entschädigung gezahlt!